

FlexPDE v7 Trial Script [B]

Trial A においては定常状態における熱伝導の問題について考察したわけですが、今度は過渡状態について調べたいとします。この場合には $\frac{\partial}{\partial t}$ という項を含んだ時間依存型の偏微分方程式を扱う必要があります。

1 問題設定

解析対象のドメインを図示すると図 1 のようになります。

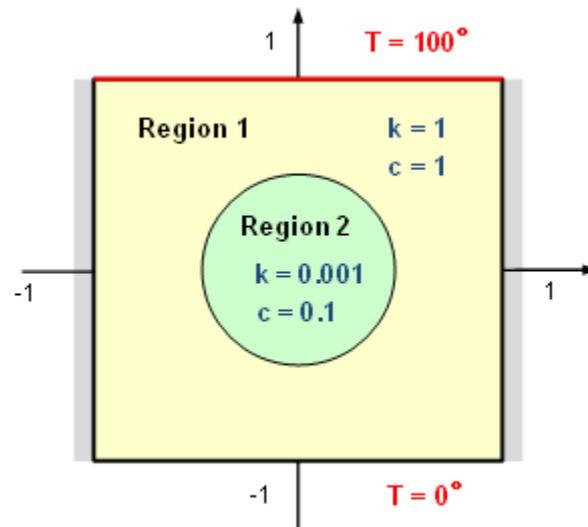


図 1 解析対象ドメイン

ほとんど *Trial A* の場合と変わりませんが、シナリオとしては時刻 $t = 0$ において上部境界の温度を瞬間的に $T = 100^\circ C$ に変化させたときの系の時間変化を見て行くことになります。また、パラメータとしては熱伝導率を表す k の他に単位体積当りの熱容量を示す c が関係してくる点が *Trial A* の場合と異なります。

2 支配方程式

ドメイン内における温度の関数を $u(x, y)$ としたとき、時間依存型の熱伝導方程式は

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(ku) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(ku) \quad (1)$$

のように表現されます。なお、

- FlexPDE においては特に明示しない限り、変数 t は時間変数として認識される。
- FlexPDE においては大文字と小文字の区別はない。

という事情があるため、温度の関数として単なる T という文字は使えないという点に注意してください。このため、ここでは従属変数名として u を使用しています。

3 スクリプト

Trial A で作成したスクリプトを編集する形で作業を進めます。📁 をクリックし、*Trial A* で作成した `trial7a.pde` というファイルを開いてください。

(1) TITLE セクション

スクリプトに対する名称を定義します。ここでは

```
TITLE 'Transient heat flow around an Insulating blob'
```

のように入力してみてください。

(2) VARIABLES セクション

このセクションでは従属変数名を定義します。*Trial A* で作成したステートメント

```
VARIABLES
```

```
U { the temperature }
```

を変更する必要はありません。

(3) DEFINITIONS セクション

このセクションでは方程式や境界条件中に現れるパラメータを定義します。*Trial A* で作成したステートメントに対して単位体積当りの熱容量を示すパラメータ c の定義を追加します。なお、ここで規定するのはデフォルト値であり、リージョン固有の値は BOUNDARIES セクション中で別途規定することになる点に注意してください。

```
DEFINITIONS
```

```
k = 1 { default conductivity }
```

```
c = 1 { default heat capacity }
```

```
r = 0.5 { blob radius }
```

(4) EQUATIONS セクション

物理場を規定する偏微分方程式を (1) 式の形で記述します。 $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ という演算子はそれぞれ dt, dxx, dyy のように表現できます。

EQUATIONS

$$c*dt(U) - dxx(k*U) - dyy(k*U) = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ の項が加わる点が定常状態の方程式との本質的な違いです。

(5) BOUNDARIES セクション

このセクションでは解析対象ドメインの構成、及び境界条件を記述します。ドメイン全体を表す Region 1 の設定については *Trial A* で作成したステートメントがそのまま使用できます。なお、Value 文はディリクレ型の境界条件を、Natural 文はノイマン型の境界条件（自然境界条件）を規定する構文です。

BOUNDARIES

REGION 1

START (-1,-1)

VALUE(U) = 0 LINE TO (1,-1)

NATURAL(U) = 0 LINE TO (1,1)

VALUE(U) = 100 LINE TO (-1,1)

NATURAL(U) = 0 LINE TO CLOSE

次に円形領域である Region 2 を設定します。 *Trial A* で作成したステートメントと異なるのは熱容量 c に関する規定が追加される点のみです。

REGION 2 { the embedded blob }

k = 0.001

c = 0.1

START (r,0)

ARC(CENTER=0,0) ANGLE=360 TO CLOSE

(6) TIME セクション

このセクションは時間依存型問題に固有のもので、解析する時間範囲を指定します。ここでは $0 \leq t \leq 15$ (単位は秒) の範囲で計算を行わせることにします。

TIME 0 TO 15

(7) PLOTS セクション

このセクションではどのようなグラフィックスをどのようなタイミングで出力させるかを規定します。このタイミングの規定は時間依存型問題に固有のもので、For 文によって記述します。For $t = t_1, t_2, \dots$ という構文を用いれば任意の時点でグラフィックスを出力させることが可能ですが、ここでは一定時間間隔の場合に適した構文を用いて指定を行うことにします。

PLOTS

```
FOR t = 1 BY 1 TO 15
  CONTOUR(U)
```

この設定の場合、 $t = 1$ から $t = 15$ まで 1 秒間隔で等温線図が出力されてくることになります。

(8) HISTORIES セクション

通常のプロットコマンドでは特定の時点における物理場の様子が静的な形で出力されるに過ぎません。これに対し、例えば温度等の物理量の値が時間的にどう推移するかを時間変化の形でグラフ化したいとニーズも当然考えられます。これを支援するのが HISTORY 文で HISTORIES セクション中で指定します。ここでは図 2 に示した 3 点 A, B, C における温度変化をグラフ化してみることにします。

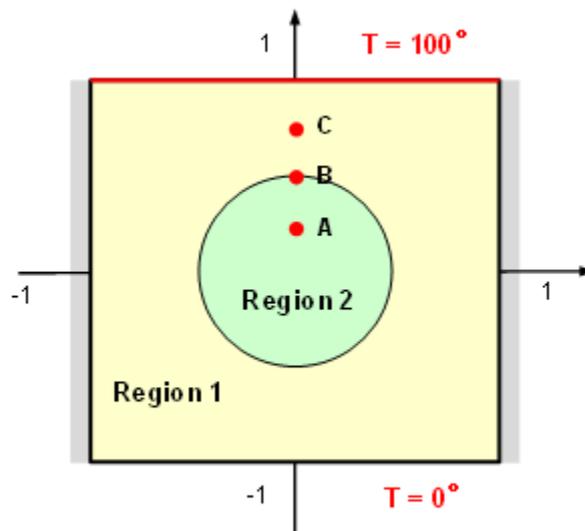


図 2 測定点

この場合の設定は次のようになります。

HISTORIES

```
HISTORY(U) AT (0,r/2) (0,r) (0,3*r/2) FIXED RANGE (0, 100)
```

なお、Fixed Range という指定は縦軸の値の範囲を固定化させるためのものです。

(9) END セクション

最後にスクリプトの終端を示す END セクションを配置します。

END

スクリプトができあがったところで File > Save As ... と操作し、編集結果を trial7b.pde という名前で保存します。

4 実行結果

時間依存型の問題の場合には、初期状態に対応した解から Δt を積み重ねる形で系の変化を追従して行きます。この場合、時間刻み Δt の大きさは一定ではありません。所定の演算精度を維持するために Δt の大きさはダイナミックに調整されます。空間方向の次元に時間方向の次元が加わるため、計算には多くの時間を要するのが一般的です。上の例の場合、CPU 性能にもよりますが、10 秒前後の計算時間が必要となります。🔧 アイコンをクリックしスクリプトを実行してみてください。

計算が完了すると複数組のプロットが生成されます。上の例の場合、Contour コマンドによる等高線図と History コマンドによる曲線プロットとが 15 組 ($t = 1, 2, \dots, 15$) 生成される形となります。ただし計算終了時点で操作画面上に表示されているのは最終時点 ($t = 15$) に対応した画像のみです。生成されたすべての画像を確認するには `trial7b_output` というサブフォルダ中に生成されている `trial7b.pg7` ファイルを開く必要があります。View ▷ View File と操作し `trial7b.pg7` を選択してみてください。



FlexPDE の操作画面上には `trial7b.pde` と `trial7b.pg7` という 2 つのファイルが開かれた形となるため、表示の切替えを行うためにはタブの操作が必要となります。以下の操作では `trial7b.pg7` タブが選択されていることが前提となります。

`trial7b.pg7` を開いた状態で実行結果をアニメーションとして再生するためには View ▷ Movie と操作します。これによって $t = 1$ から $t = 15$ までの画像が自動的に連続再生されて行きます。なお、View ▷ Frame Delay と操作することによりフレーム切替えの時間間隔を調整することができます。

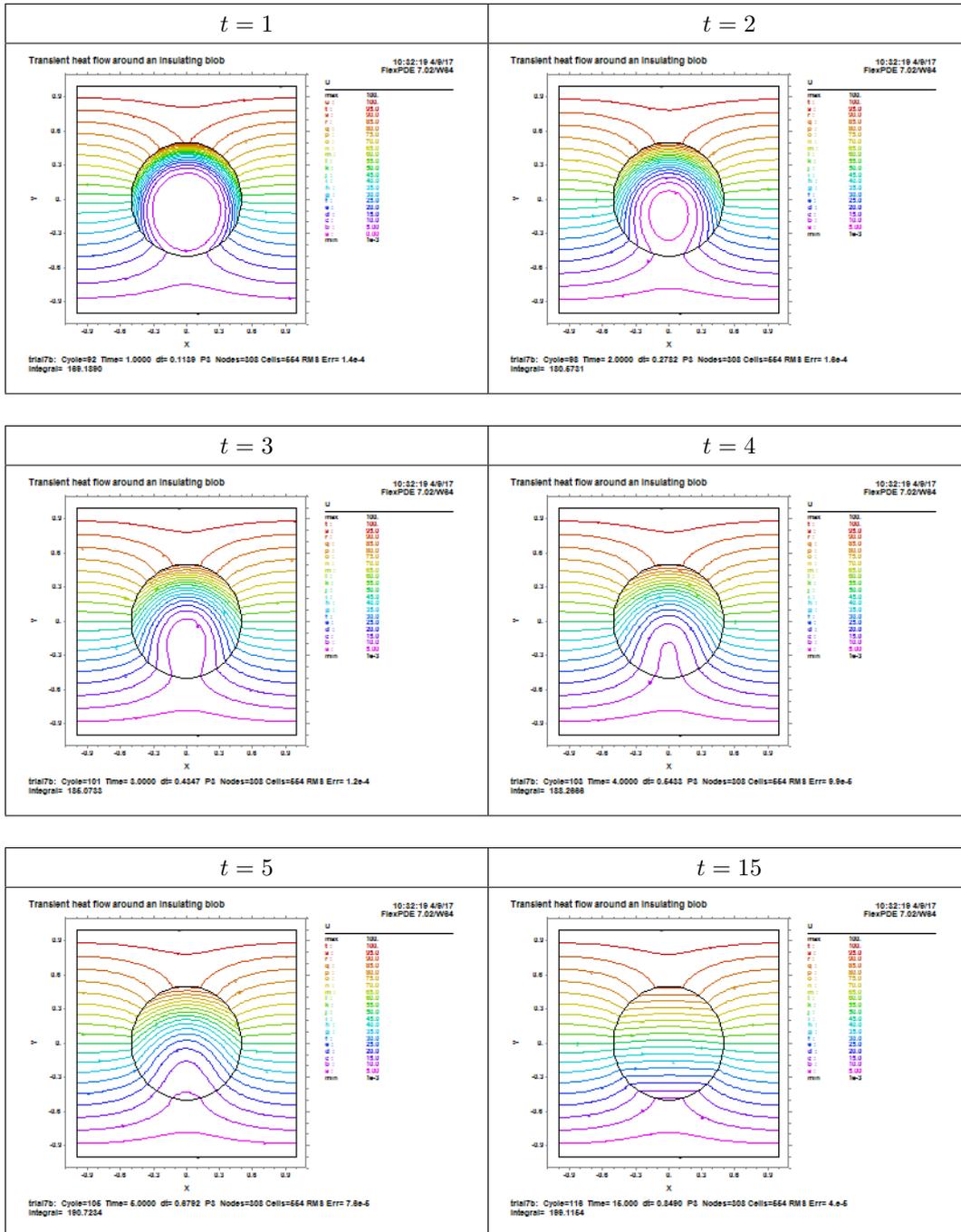


アニメーションを再実行させるためには一旦 View ▷ Restart と操作してください。

フレームを手動で操作することも可能です。前送りの場合には一旦 View ▷ Restart と操作した後、CTRL+SHIFT+N キーを押下することによってフレーム切替えを行うことができます。

(1) 等温線図

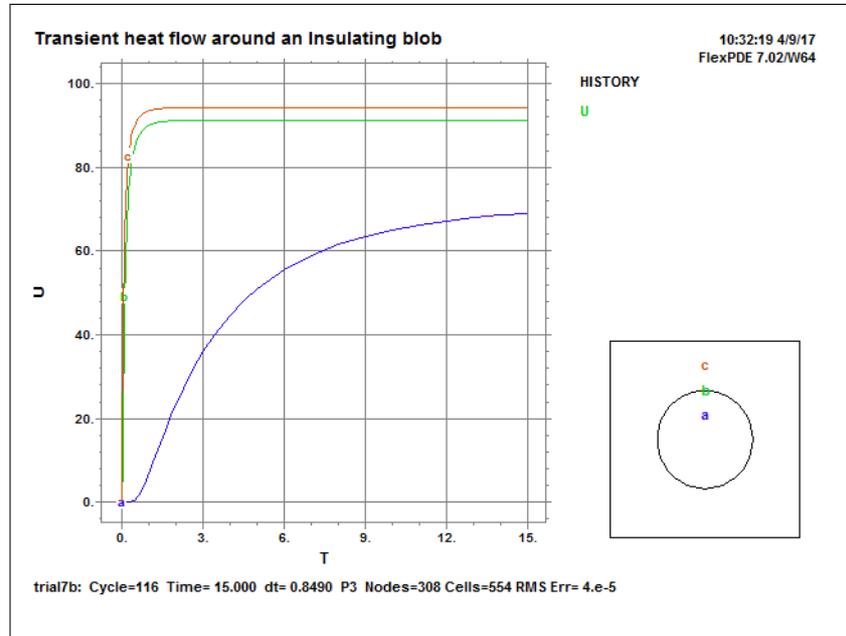
次に示すのは $t = 1, 2, 3, 4, 5, 15$ における等温線図です。



$t = 15$ における等温線図は *Trial A* で得られた定常状態における等温線図とほとんど変わらないものである点にご注意ください。

(2) History プロット

$t = 15$ における History プロットは次のようになります。



$k = 1, c = 1$ という特性を持った B 点、 C 点の温度は $t = 1$ でほぼ定常状態に達しているのに対し、 $k = 0.001, c = 0.1$ である円形領域中の A 点は温度上昇が遅く、 $t = 15$ の時点でも依然定常状態には達していないことがこのグラフから読み取れます。



Math 工房より FlexPDE をご購入いただいた方々には、FlexPDE の様々な用例を記したサンプルスクリプト約 100 件を日本語解説付きでご提供します。

