FlexPDE v7 Trial Script [C]

汎用的な偏微分方程式ソルバである FlexPDE には**固有値解析（モード解析）**の機能も備わっています。ここでは 2 次元の円形膜の振動を例に取って FlexPDE の実行を行ってみます。用意するスクリプトは極めて単純なものです。

1 問題設定

次の図に示されるような円形膜において円周上の点が固定されているとしたときの固有振動について考察することにします。

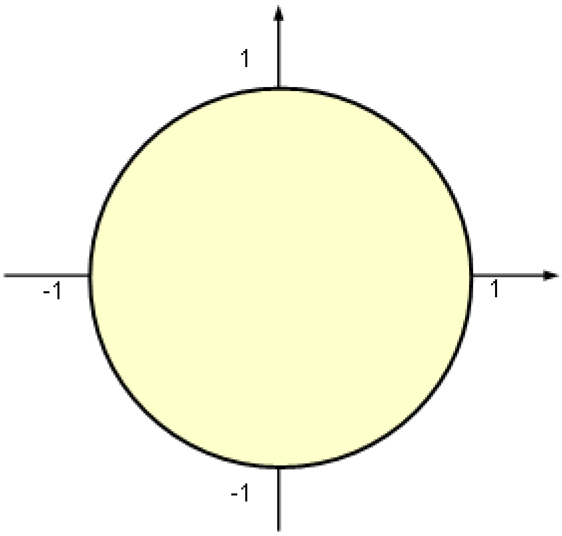


図 1 解析対象ドメイン

なお、ここでは円の半径は $1m$ であるとしてスクリプトを構成することにします。

2 支配方程式

x-y 平面上に置かれた膜が z 方向に振動するものとし、その z 方向の変位を v とすると、v は空間座標 x, y と時間 t の関数となり、その振動は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

という方程式で規定されることになります。ただし c は膜の材質によって規定されるパラメータです。ここで今、

$$v(x, y, t) = u(x, y) \cdot e^{i\omega t} \tag{2}$$

という変数分離型の解を想定することにします。すなわち u は空間座標のみに依存する関数であり、一方、時間変化は正弦的な周期解を前提とする形になります。このとき (2) を (1) 式に代入することにより u に関する

$$\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0 \qquad \text{ただし } \lambda = \frac{\omega}{c} \tag{3}$$

という方程式が誘導されてきます（∇^2 は $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を意味する微分演算子です)。

この方程式は λ が特定の値を持つときに non-trivial な解を持ちます。そのような λ の値を固有値 (eigen-values) と言うわけですが、FlexPDE の固有値解法の機能を用いると、複数の固有値に対応した解のセット $\{u_\lambda(x, y)\}$ を一気に算出することが可能となります。

3 スクリプト

ここでは次のようなスクリプト `trial7c.pde` を用意します。

```
TITLE
    'Circular Membrane, Eigenstates'
SELECT
    Errlim = 1e-4
    Modes = 12
VARIABLES
    u
DEFINITIONS
    r = 1.0
EQUATIONS
    del2(u) + lambda^2*u = 0
BOUNDARIES
    Region 'domain'
        Start (r,0) Value(u) = 0
            Arc(Center=0,0) Angle=360
PLOTS
    Contour(u) painted
END
```

セクションごとに説明を補足しておくと次のようになります。

(1) SELECT **セクション**

SELECT セクションでは FlexPDE 実行にかかわる様々なオプションを指定することができます。Errlim というのは演算精度に関するオプションで、許容される相対演算誤差の大きさを規定します。デフォルト値は 0.002 なのでそれでも良いのですが、ここでは 0.0001 という形でより高い精度を要求してみます。有限要素法のメッシュもそれなりに細かいものが必要となるため、計算に要する時間はデフォルト値の場合に比べるとはるかに長いものとなります。

SELECT セクション中でのより本質的な指定が Modes $= n$ というステートメントです。この指定があるとモード解析、すなわち固有値解法の機能が起動されることになります。この場合、n は算出する固有値の数を表します。ここでは 12 という値を指定しているので、小さい方から 12 個の固有値が特定され、それに対応した解 $u_1, u_2, \ldots, u_{12}$ が算出されることになります。

(2) EQUATIONS **セクション**

EQUATIONS セクションでは方程式 (3) を記述します。del2(u) という指定の代りに dxx(u) + dyy(u) と記述しても構いません。なお、固有値を表すパラメータは lambda という名称に固定されているのでご注意ください。このパラメータについては DEFINITIONS セクション中で定義する必要はありません。

(3) BOUNDARIES **セクション**

解析対象のドメインとして半径 1 の円形領域を定義すると共に、円周上では $u = 0$ である旨の境界条件を指定します。

(4) PLOTS **セクション**

関数 $u(x, y)$ の等高線図を色塗りを施した形で出力させます。モード解析の場合、指定されたモード数だけのプロットが作成されることになります。この例では u_1 から u_{12} までの 12 個のプロットが出力されてくるわけですが、最終的な解の数式は

$$v_k(x, y, t) = u_k(x, y) \cdot e^{i\omega t} \qquad k = 1, 2, \ldots, 12 \tag{4}$$

で与えられることになる点に注意してください。すなわち $u(x, y)$ は最大振幅時の関数形状を意味することになります。

4 実行結果

(1) 固有値リスト

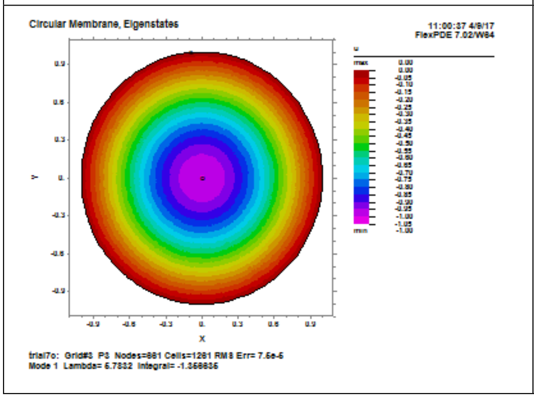
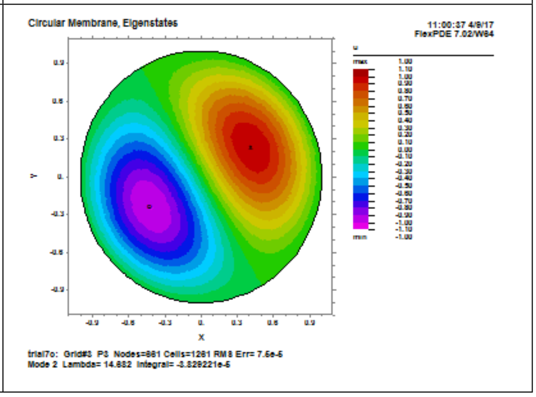
固有値解法の場合、算出された固有値一覧を示す次のような表がグラフに先立ち出力されてきます。

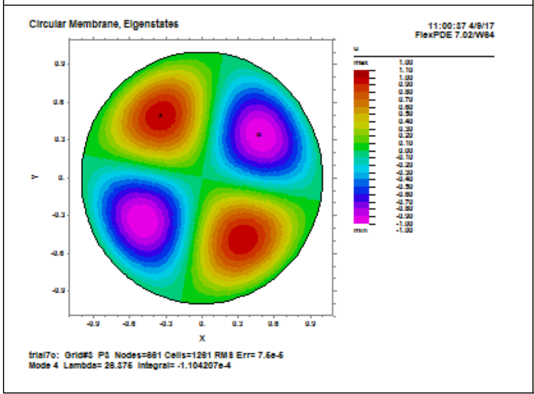
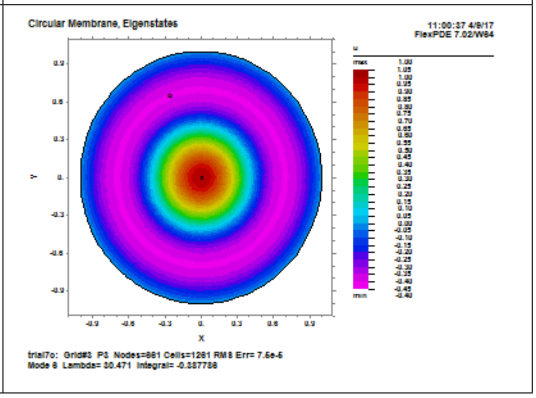
```
Circular Membrane, Eigenstates                                  11:00:37 4/9/17
                                                                  FlexPDE 7.02

   Eigenvalues:

   Mode  1:  5.783190
   Mode  2:  14.68198
   Mode  3:  14.68198
   Mode  4:  26.37463
   Mode  5:  26.37463
   Mode  6:  30.47128
   Mode  7:  40.70650
   Mode  8:  40.70650
   Mode  9:  49.21851
   Mode 10:  49.21851
   Mode 11:  57.58302
   Mode 12:  57.58308

trial7c:  Grid#3  P3  Nodes=661  Cells=1261  RMS Err= 7.5e-5
```

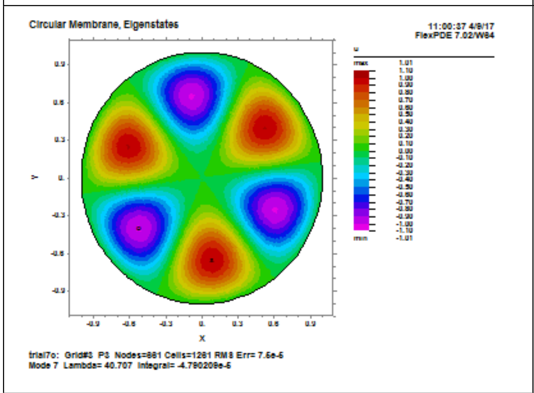
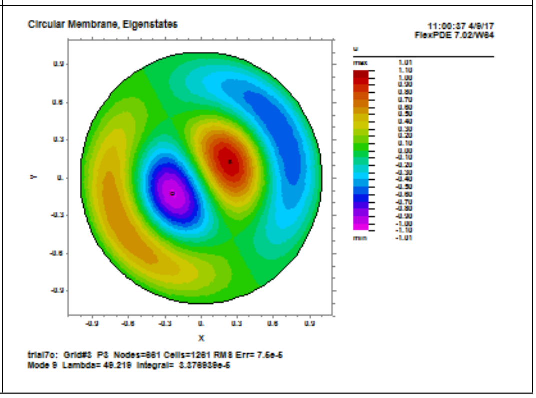
Mode 2 と Mode 3、あるいは Mode 4 と Mode 5 等、固有値の値が等しい状態は縮退していると言います。

(2) $u(x, y)$ の等高線図

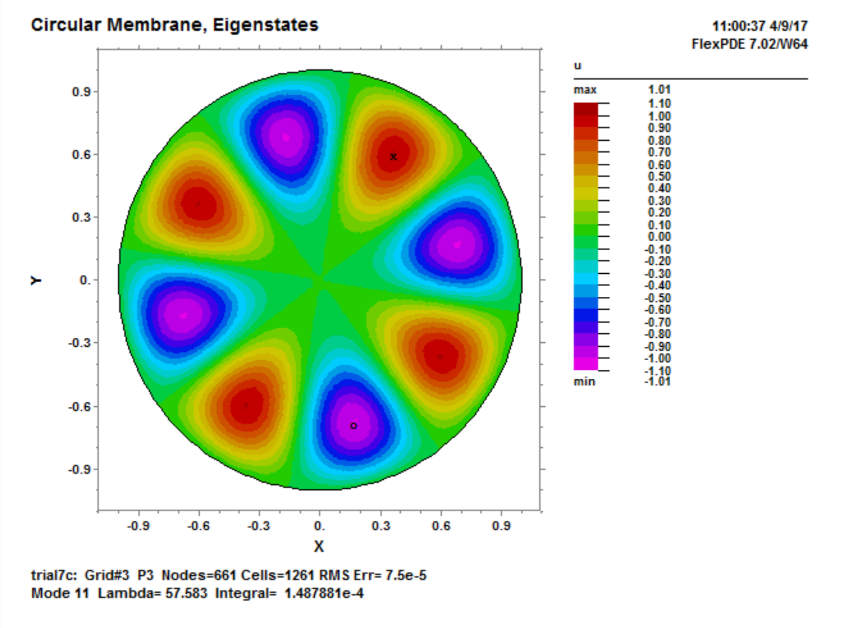
各モードに対応した $u(x, y)$ の等高線図は次のようになります。なお、縮退しているモードについては一方のみを表示してあります。

Mode 1	Mode 2
	

Mode 4	Mode 6
	

Mode 7	Mode 9
	

Mode 11


Circular Membrane, Eigenstates
11:00:37 4/9/17
FlexPDE 7.02/W64
u
max 1.01
1.10
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
-0.10
-0.20
-0.30
-0.40
-0.50
-0.60
-0.70
-0.80
-0.90
-1.00
-1.10
min -1.01
Y
X
0.9
0.6
0.3
0.
-0.3
-0.6
-0.9
trial7c: Grid#3 P3 Nodes=661 Cells=1261 RMS Err= 7.5e-5
Mode 11 Lambda= 57.583 Integral= 1.487881e-4

■