est-015

時系列データモデル

1. `arima` コマンドは Kalman フィルタと最尤法を介して自己回帰移動平均 (ARMA: autoregressive moving-average) モデル、自己回帰和分移動平均 (ARIMA: autoregressive integrated moving-average) モデルに対するフィットを行います。今、ラグ演算子 L から構成される複合演算子を

$$\rho(L^p) = 1 - \rho_1 L - \rho_2 L^2 - \cdots - \rho_p L^p \tag{15.1}$$
$$\theta(L^q) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q \tag{15.2}$$

   と定義したとき、ARMA(p, q) モデルは

$$\rho(L^p)(y_t - \mathbf{x}_t\boldsymbol{\beta}) = \theta(L^q)\epsilon_t \tag{15.3}$$

   のように表現されます。ただし $L^j y_t = y_{t-j}$ を意味します。これに対して ARIMA 過程は Δy_t、すなわち $y_t - y_{t-1}$ が ARMA モデルに従う過程のことを言います。詳しくは `[TS]` **arima** (*mwp-003*) をご参照ください。

2. ARFIMA (autoregressive fractionally integrated moving average) モデルは ARMA, ARIMA モデルを一般化したもので、長期記憶過程 (long-memory processes) を取扱うことができます。ARMA モデルの場合、短期記憶 (short memory) — ショックの後、過程が比較的早期に常態に復すること — が仮定されます。一方、ARIMA の場合にはショックは永続的であり、その記憶は消失しないという形のモデルとなります。ARFIMA は記憶の長短という意味において両者の中間を行くものと言えます。`arfima` コマンド（`[TS]` **arfima** 参照）はこの ARFIMA モデルをフィットさせる機能を提供します。

3. 観測不能成分モデル (UCM: unobserved components model) では外生変数の影響を制御した上で、時系列をトレンド成分、季節変動成分、周期性成分、個別成分 (idiosyncratic components) に分解します。UCM は平準化と分解に関する問題に対し、柔軟性が高く、かつフォーマルなアプローチを提供するものと言えます。UCM モデルのフィットは `ucm` コマンド（`[TS]` **ucm** 参照）によって行われます。

4. 推定コマンドではありませんが関連する機能として `tsfilter` コマンド（`[TS]` **tsfilter** 参照）があります。このコマンドはバンドパスフィルタ (band-pass filter)、ハイパスフィルタ (high-pass filter) の機能を提供するもので、時系列をトレンド成分と周期性成分 (cyclic components) に分割する際に使用されます。Baxter-King, Butterworth, Christiano-Fitzgerald, Hodrick-Prescott といった種類のフィルタが選択できます。

5. ARIMA, ARFIMA, UCM に関連する事項ですが、推定されたパラメータ値はスペクトル密度として表現した方が解釈しやすい場合があります。`psdensity` コマンド（[TS] **psdensity** 参照）を使用すると結果の変換を行うことができます。

6. `prais` コマンド（[TS] **prais** 参照）は攪乱 (disturbances) が 1 次の自己回帰、すなわち AR(1) に従うとの前提のもとで、Prais-Winsten 変換、または Cochrane-Orcutt 変換を伴う回帰を実行します。

7. `newey` コマンド（[TS] **newey** 参照）は標準誤差の推定に Newey-West 法を用いた形で線形回帰を実行します。この推定法は不均一分散 (heteroskedasticity) と共に指定された次数以下の自己相関 (autocorrelation) に対してもロバストであるという特徴を持ちます。

8. Stata には ARCH/GARCH 系モデルのフィットを行うコマンドとして `arch`（[TS] **arch** (*mwp-051*) 参照）が用意されています。ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity)、あるいは GARCH (generalized ARCH) は価格変動に代表されるような変動する分散 — ボラティリティ (volatility) — をモデル化するものです。この ARCH/GARCH 系モデルには数多くの種類が含まれますが、基本となる ARCH(m) のモデル式を記しておくと次のようになります。

$$\begin{cases} y_t = \mathbf{x}_t \boldsymbol{\beta} + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \epsilon_{t-1}^2 + \gamma_2 \epsilon_{t-2}^2 + \cdots + \gamma_m \epsilon_{t-m}^2 \end{cases} \tag{15.4}$$

時間と共に変動する分散 (heteroskedasticity) のモデル式に ARCH の本質があると言えます。この ARCH(m) のモデル式をさらに一般化したものが GARCH(m, k) のモデル式であり、次のように表現されます。

$$\begin{cases} y_t = \mathbf{x}_t \boldsymbol{\beta} + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \epsilon_{t-1}^2 + \gamma_2 \epsilon_{t-2}^2 + \cdots + \gamma_m \epsilon_{t-m}^2 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \delta_2 \sigma_{t-2}^2 + \cdots + \delta_k \sigma_{t-k}^2 \end{cases} \tag{15.5}$$

9. `arch` は単変量のモデルを前提とするわけですが、多変量の ARCH/GARCH 系モデルに対応するものとして `mgarch` 系コマンド（[TS] **mgarch** 参照）が別に用意されています。モデルの種類に応じて次の 4 種類のコマンドが存在します。
   - `mgarch dvech` – diagonal vech model
   - `mgarch ccc` – constant conditional correlation model
   - `mgarch dcc` – dynamic conditional correlation model
   - `mgarch vcc` – varying conditional correlation model

10. 多変量の時系列モデルとしては次の 3 種類がサポートされており、関連するコマンドが一式用意されています。
    - ベクトル自己回帰 (VAR: vector autoregression) モデル
    - 構造 VAR (SVAR: structural VAR) モデル
    - ベクトル誤差修正 (VEC: vector error-correction) モデル

11. $\mathbf{x}_t$ を外生変数としたとき、次数が p の VAR モデル、すなわち VAR(p) のモデル式は次のように表現されます。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{B}_0\mathbf{x}_t + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B}_s\mathbf{x}_{t-s} + \mathbf{u}_t \tag{15.6}$$

VAR モデルのフィットを行うコマンドには `var`（`[TS]` **var** (*mwp-004*) 参照）と `varbasic`（`[TS]` **varbasic** (*mwp-005*) 参照）の 2 種類が用意されています。`varbasic` は使いやすさに力点を置いたコマンドで、インパルス応答分析 (IRF: impulse-response functions) 関連の機能まで取り込んでいる点に特徴があります。ただし扱える VAR の機能自体には制限が付きます。これに対し `var` は汎用的なコマンドです。VAR モデルのフィット後、IRF 分析や予測誤差分散分解 (FEVD: forecast-error variance decomposition) といった操作を行おうとした場合には、別途 `irf` 系コマンド（`[TS]` **irf** (*mwp-006*) 参照）の併用が必要となります。

12. SVAR モデルの場合のモデル式は次のように表現されます。ただし外生変数は含まないものとし、L はラグ演算子を表すものとします。

$$\mathbf{A}(\mathbf{I}_K - \mathbf{A}_1 L - \mathbf{A}_2 L^2 - \cdots - \mathbf{A}_p L^p)\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon}_t \tag{15.7}$$

行列 $\mathbf{A}$ の存在により同時点の変数間に相互の関係が存在する点が (15.6) の VAR モデルと異なる点です。SVAR モデルのフィットは `svar` コマンド（`[TS]` **svar** (*mwp-007*) 参照）により実行されます。

13. 今、

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{15.8}$$

で表される VAR(p) 過程が単位根過程 I(1) であるとし、かつ共和分 (cointegration) の関係が存在するとき、$\mathbf{y}_t$ は

$$\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1}\mathbf{\Gamma}_i\Delta\mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{15.9}$$

のような VECM 形式で表現できることが知られています。(15.9) 式で表される VEC モデルに対してフィットを行うコマンドが `vec`（`[TS]` **vec** (*mwp-063*) 参照）であるわけですが、それに付帯するコマンドには数多くのものがあります。全般的な概要については `[TS]` **vec intro** (*mwp-008*) の項をご参照ください。

14. `sspace` コマンド（`[TS]` **sspace** 参照）は多変量**状態空間モデル**(state-space models) 中のパラメータを Kalman フィルタを用いて推定します。時系列モデルの状態空間表現は柔軟性に優れ、ベクトル自己回帰移動平均 (VARMA: vector autoregressive moving-average) モデル、動的因子 (DF: dynamic-factor) モデル、構造的時系列 (STS: structural time-series) モデル等、多様なモデルのパラメータ推定に利用できます。また、それはある種の確率的動的計画法の問題 (stochastic dynamic-programming problems) に対しても有効です。

15. `dfactor` コマンド（`[TS]` **dfactor** 参照）は**動的因子モデル** (dynamic-factor models) のパラメータを推定します。多変量時系列に対する動的因子モデルは観測可能なアウトカムと観測不能な因子の双方における VAR 構造を許容することができます。また外生共変量の扱いも可能です。

■