mwp-008

vec intro - ベクトル誤差修正モデルの概要 【 評価版 】

Stata には**ベクトル誤差修正モデル** (VECM: vector error-correction models) に関連したコマンドが一式用意されています。本 whitepaper ではそれら VECM 関連機能に関する全般的な解説と用例の紹介を行います。個々のコマンドに関する機能概要と用例についてはそれぞれ別個の whitepaper をご参照ください。

1. VEC モデルの基本

(1) 共和分とは

x_t と y_t が 1 次の和分過程 I(1) であるときに、それらの線形結合 $\beta_1 x_t + \beta_2 y_t$ が定常過程 I(0) となる関係が成立するのであれば、x_t と y_t とは**共和分の関係にある** (cointegrated) と言います。またベクトル $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)'$ を**共和分ベクトル** (cointegrating vector) と呼びます。

ベクトル誤差修正モデル (VECM: vector error correction model) は変数間に何らかの長期的均衡が存在する場合の分析手法として用いられます。

(2) **誤差修正メカニズム**

まず、次のような K 変量の VAR(p) モデルについて考えます。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^{p} \mathbf{A}_i \mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{1}$$

ただし $\{\mathbf{y}_t\}$ を構成するすべての変数 $y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{Kt}$ は I(1) 過程に従う**非定常系列**である点に注意してください。このモデルを扱う上では第 1 階差を取ることがポイントとなります。詳細は補足 1 を参照いただくとして、(1) 式は次のように変形できます。

$$\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_i \Delta\mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{2}$$

ただし $\boldsymbol{\Pi} = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j - \mathbf{I}_K$, $\boldsymbol{\Gamma}_i = -\sum_{j=i+1}^{p} \mathbf{A}_j$ です。この (2) 式で重要な点は、右辺の $\boldsymbol{\Pi}\mathbf{y}_{t-1}$ という項以外は左辺も含め定常であるという点です。このことから $\boldsymbol{\Pi}\mathbf{y}_{t-1}$ も定常でなくてはならないという帰結が導かれます。そのためには次のいずれかの条件が成立する必要があります。

Case 1:　$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{0}$、すなわち $\sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j = \mathbf{I}_K$ となること。

たまたまこのような条件が満たされるのであれば、(2) 式は VAR のモデル式となるため、$\{\Delta\mathbf{y}_t\}$ について VAR をフィットさせれば良いことになります。この場合、$\{\mathbf{y}_t\}$ は共和分の関係にはありません。

Case 2:　$\boldsymbol{\Pi}\mathbf{y}_{t-1}$ というベクトルの各成分が定常であること。

これは変数 $y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{Kt}$ 間の線形結合（1 つとは限らない）が定常であること、すなわち共和分関係の存在を意味するものです。この場合、$\boldsymbol{\Pi}$ は $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ のように表現できることが知られています。すなわち (2) 式は

$$\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_i \Delta\mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{3}$$

のようになります。ただし $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ は共に $K \times r$ の行列であり、r は $\boldsymbol{\Pi}$ のランクを意味します。$\boldsymbol{\beta}'$ は r 組の**共和分ベクトル**を表し、$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}$ によって r 個の線形結合式、すなわち**誤差修正項** (error correction term) が規定されることになります。一方、$\boldsymbol{\alpha}$ は**調整係数ベクトル** (adjustment coefficient vector) と呼ばれます。

(3) 式は VECM の基本式です。変数間に共和分の関係が存在する場合にモデルが (3) 式のような形で表現できることを**グランジャーの表現定理** (Granger's representation theorem) と言います。

(3) **共和分ランクの検定**

VEC モデルにおいていくつの共和分関係が存在するかは Johansen **の方法**に基づき、$\boldsymbol{\Pi}$ のランク r、すなわち 0 でない固有値の数を推定することによって行われます。具体的な検定手法としてはトレース統計量を用いた方法の他、最大固有値や情報量基準に基づく方法が用意されています。詳細は [TS] **vecrank** (*mwp-064*) をご参照ください。

2. VECM の用例

本セクションにおいては Example データセット `txhprice.dta` を用いて VEC 関連コマンドの用法を説明します。

```
. use http://www.stata-press.com/data/r15/txhprice.dta
```
[*1]

このデータセット中にはテキサス州 4 都市 — Austin, Dallas, Houston, San Antonio — における住宅価格対数値の推移が月単位に記録されています。

```
. list t austin dallas houston sa if _n <= 4 | _n >= (_N-3), separator(4)
```

	t	austin	dallas	houston	sa
1.	1990m1	11.40422605	11.6324847	11.38849539	11.19134184
2.	1990m2	11.39639165	11.62803827	11.41861479	11.22257316
3.	1990m3	11.36442546	11.60550465	11.39188714	11.29849385
4.	1990m4	11.11393932	11.62625415	11.442503	11.39863632
165.	2003m9	12.14579171	12.16837078	12.04590389	11.80931948
166.	2003m10	12.19955143	12.14046689	12.05117168	11.78524006
167.	2003m11	12.19551713	12.15898104	12.06968002	11.84438516
168.	2003m12	12.25200158	12.17303279	12.10625231	11.85296277

これらの変数をグラフ化すると次のようになります。価格はすべて対数値です。

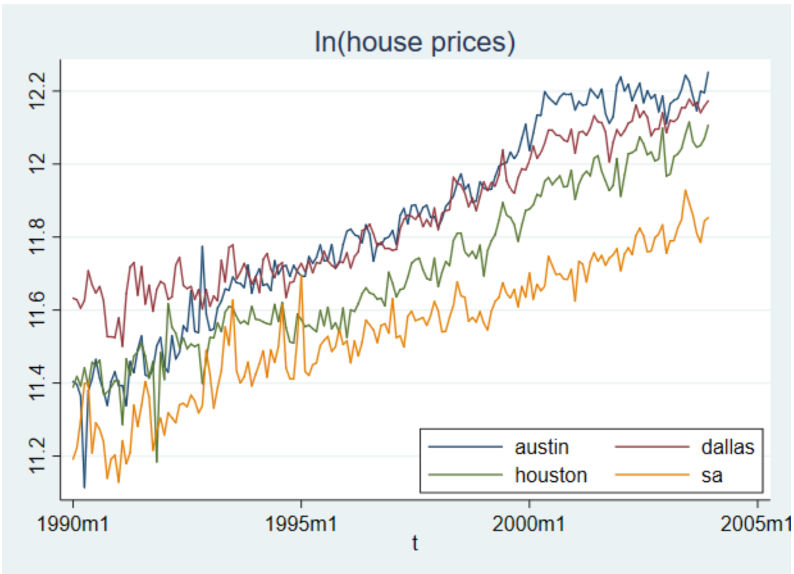

図 1　住宅価格の変動（4 都市）

[*1] メニュー操作：File ▷ Example Datasets ▷ Stata 15 manual datasets と操作、Time-Series Reference Manual [TS] の vec intro の項よりダウンロードする。

いずれの時系列もトレンドを示しており、定常過程とは言えないことは明らかです。それではまず Dallas と Houston のデータに着目して分析を行ってみることにします。

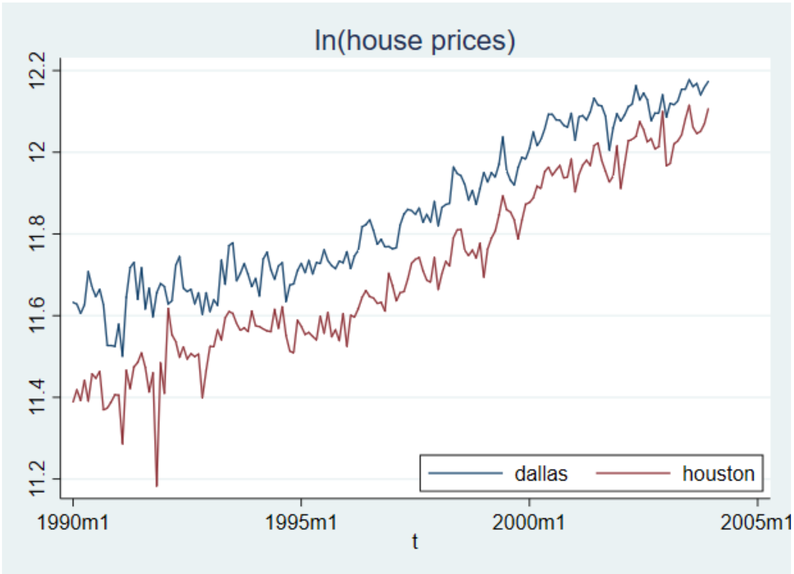

図 2　住宅価格の変動（2 都市）

2.1 ラグ次数の選択

評価版では割愛しています。

2.2 共和分ランクの推定

評価版では割愛しています。

2.3 VECM のフィット

セクション 2.1、セクション 2.2 の結果に基づき、1 つの共和分方程式の存在を前提にラグ次数 1/2 の VEC モデルをフィットさせることにします。なお、$\mathbf{y}_t = (\texttt{dallas}, \texttt{houston})'$ としたとき、フィット対象のモデル式は成分表示で書くと次のようになります。

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_{1,t-1} \\ \Delta y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \tag{4}$$

なお、以下の操作ではタイムトレンドとして constant という指定を行っていますが、この点については補足 2 を参照ください。

- Statistics ▷ Multivariate time series ▷ Vector error-correction model (VECM) と操作
- Model タブ: Dependent variables: `dallas houston`
  Number of cointegrating equations (rank): 1 （デフォルト）
  Maximum lag to be included in underlying VAR model: 2 （デフォルト）
  Trend specification: constant （デフォルト）

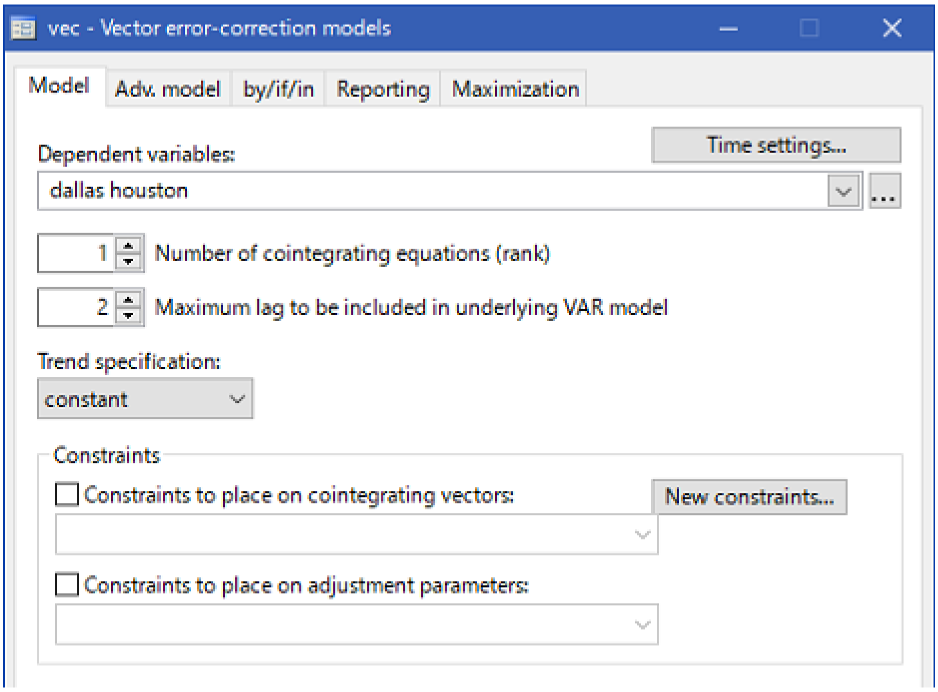

図 5 vec ダイアログ - Model タブ

```
. vec dallas houston, trend(constant)

Vector error-correction model

Sample:  1990m3 - 2003m12                        Number of obs     =        166
                                                 AIC               =  -7.115516
Log likelihood =  599.5878                       HQIC              =   -7.04703
Det(Sigma_ml)  =  2.50e-06                       SBIC              =  -6.946794

Equation           Parms      RMSE     R-sq      chi2     P>chi2
----------------------------------------------------------------
D_dallas              4     .038546   0.1692   32.98959   0.0000
D_houston             4     .045348   0.3737   96.66399   0.0000
----------------------------------------------------------------
```

	Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
D_dallas						
_ce1 L1.	-.3038799	.0908504	-3.34	0.001	-.4819434	-.1258165
dallas LD.	-.1647304	.0879356	-1.87	0.061	-.337081	.0076202
houston LD.	-.0998368	.0650838	-1.53	0.125	-.2273988	.0277251
_cons	.0056128	.0030341	1.85	0.064	-.0003339	.0115595
D_houston						
_ce1 L1.	.5027143	.1068838	4.70	0.000	.2932258	.7122028
dallas LD.	-.0619653	.1034547	-0.60	0.549	-.2647327	.1408022
houston LD.	-.3328437	.07657	-4.35	0.000	-.4829181	-.1827693
_cons	.0033928	.0035695	0.95	0.342	-.0036034	.010389

Cointegrating equations

Equation	Parms	chi2	P>chi2
_ce1	1	1640.088	0.0000

Identification: beta is exactly identified

Johansen normalization restriction imposed

beta	Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
_ce1						
dallas	1	.	.	.	.	.
houston	-.8675936	.0214231	-40.50	0.000	-.9095821	-.825605
_cons	-1.688897	.	.	.	.	.

`vec` からの出力結果中にある `ce` という表示は共和分方程式を意味する cointegrating equations の略です。その実体をなす $\boldsymbol{\beta}$ の推定値は最後のテーブル中に表示されています。すなわちこの 2 変量 VECM(1) モデルの共和分ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.868 \end{pmatrix}$$

であり

$$y_{1t} - 0.868 y_{2t} - 1.689 \tag{5}$$

が定常時系列 I(0) となることが示唆されているわけです。一方、調整係数 (adjustment coefficients) $\boldsymbol{\alpha}$ を含む他のパラメータについては方程式別にメインのテーブル中に表示されています。抽出すると次のようになります。

$$\begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_1 \\ \widehat{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.304 \\ 0.503 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0056 \\ 0.0034 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_{11} & \widehat{\gamma}_{12} \\ \widehat{\gamma}_{21} & \widehat{\gamma}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.165 & -0.0998 \\ -0.062 & -0.333 \end{pmatrix}$$

全般的に見てモデルのフィットが良好であることは出力に示されています。共和分方程式の `houston` の係数 (β_2)、及び調整パラメータ (α_1, α_2) はいずれも有意であることがわかります。この 2 変量モデルにおける調整パラメータの解釈は容易であり、その符合が均衡に向う方向にあることが確認できます。共和分方程式の予測が正であるとすると、その方程式中における `dallas`(y_{1t}) の係数値が正であることから、`dallas` が均衡値よりも高い値にあることがわかります。一方、α_1 の推定値は –0.3 であるわけです。従って Dallas における平均住宅価格が非常に高いときには、それは短期間のうちに Houston レベルに戻ることになります。逆に α_2 の推定値は 0.5 となっています。このため Dallas における平均住宅価格が非常に高いときには、Dallas における価格が調整されると同時に、Houston の平均住宅価格は Dallas レベルの方向に向うことになります。

評価版では割愛しています。

2.4 Johansen の規格化

評価版では割愛しています。

2.5 推定後機能

(1) `predict`

評価版では割愛しています。

(2) `vecstable`

評価版では割愛しています。

(3) `veclmar`

評価版では割愛しています。

(4) `vecnorm`

評価版では割愛しています。

2.6 インパルス応答解析

評価版では割愛しています。

2.7 VECM による予測

評価版では割愛しています。

補足１ – VEC モデル式の誘導

評価版では割愛しています。

補足２ – タイムトレンド

評価版では割愛しています。

■