mwp-004

var - ベクトル自己回帰モデル 【 評価版 】

Stata には**ベクトル自己回帰** (VAR: vector autoregressive) モデルに関連したコマンドが一式用意されています。本 whitepaper ではその中核となる `var` コマンドについて、その機能概要と用例を紹介します。なお、VAR としての機能は制限されますが、簡便な操作で IRF や FEVD をも含む形で分析が行える `varbasic` というコマンドが別に用意されています。これについては `[TS]` **varbasic** (*mwp-005*) をご参照ください。

1. VAR モデル	
2. var の用例	Example 1
	Example 2
	Example 3
3. var 関連推定後機能	

1. VAR モデル

VAR の一般的なモデル式を記すと次のようになります。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{B}_0\mathbf{x}_t + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_{t-1} + \cdots + \mathbf{B}_s\mathbf{x}_{t-s} + \mathbf{u}_t \qquad t \in \{-\infty, \infty\} \tag{1}$$

ただし $\mathbf{u}_t$ はホワイトノイズ、すなわち

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}_t) &= \mathbf{0} \\ E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t') &= \mathbf{\Sigma} \\ E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_s') &= \mathbf{0} \quad \text{for } t \neq s \end{aligned}$$

であるとします。とは言えベクトル式では少々わかりにくいかも知れないので、外生変数 $\mathbf{x}_t$ を含まない 3 変量 VAR(2) モデル（すなわち $p = 2$）という簡単なケースについて、参考までに成分表記のモデル式を記しておきます。

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \\ y_{3,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\text{ただし} \quad \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix} \sim \text{W.N.}(\mathbf{\Sigma})$$

攪乱項 $\mathbf{u}_t$ はホワイトノイズ (W.N.) ですが、その分散共分散行列が対角行列ではなく、一般的な $\mathbf{\Sigma}$ と表記されている点に注意してください。(2) 式の例で言えば

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{ただし } \sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

であるわけです。従って 3 変量 VAR(2) モデルの場合、推定対象となるパラメータの数は v_j が 3 個、$a_{ij}^{(1)}$ が 9 個、$a_{ij}^{(2)}$ が 9 個、σ_{ij} が 6 個で計 27 個となります。

(2) 式の例に示されるような VAR モデルの各方程式は誤差項の相関を通じて関係しています。このようなモデルは**見かけ上無関係な回帰** (SUR: seemingly unrelated regression) **モデル**と呼ばれます。一般的に SUR モデルに対して有効な推定を行うためには、誤差項の相関を考慮する必要があるため、すべての回帰式を同時に推定しなくてはなりません。しかし VAR モデルの場合にはすべての回帰式が同一の説明変数を持つという特殊性が備わっています。この条件のもとでは、各方程式に対し個別に OLS を適用することによって得られる係数の推定値が**最良線形不偏推定量** (BLUE: best linear unbiased estimator) となることが知られています。さらに攪乱項 $\mathbf{u}_t$ が多変量正規分布に従う場合には、各方程式を個別に OLS によって推定した係数値は最尤推定量とも一致することになります。

2. var **の用例**

▷ Example 1: **基本的なモデル**

`[TS]` **var** の Example 1 には基本的な VAR モデルの用例が紹介されています。使用するのは Example データセット `lutkepohl2.dta` です。

```
. use http://www.stata-press.com/data/r16/lutkepohl2.dta *1
(Quarterly SA West German macro data, Bil DM, from Lutkepohl 1993 Table E.1)
```

ここで設定するのは (2) 式で表現される 3 変量 VAR(2) モデルであるわけですが、y_1, y_2, y_3 には次の 3 つの時系列変数をそれぞれ対応させることにします。

変数名	内容	備考
dln_inv	$\Delta \ln(inv)$	inv： 投資
dln_inc	$\Delta \ln(inc)$	inc： 所得
dln_consump	$\Delta \ln(consump)$	consump： 消費

参考までに変数 `inv` について関係するデータを一部リストしておきます。

[*1] メニュー操作： File ▷ Example Datasets ▷ Stata 16 manual datasets と操作、Time-Series Reference Manual [TS] の var の項よりダウンロードする。

`. list qtr inv ln_inv dln_inv in 1/8, separator(4)` [*2]

	qtr	inv	ln_inv	dln_inv
1.	1960q1	180	5.192957	.
2.	1960q2	179	5.187386	-.0055709
3.	1960q3	185	5.220356	.03297
4.	1960q4	192	5.257495	.0371394
5.	1961q1	211	5.351858	.0943627
6.	1961q2	202	5.308268	-.0435905
7.	1961q3	207	5.332719	.0244513
8.	1961q4	214	5.365976	.033257

データセット上には 1960q1 から 1982q4 までのデータが記録されていますが、ここでは 1978q4 までの範囲に限定する形でフィットを行います。

`var` コマンドを実行するに際してはラグ次数を指定する必要があるわけですが、本用例ではデフォルトの設定を用いることにします。このためフィットされるモデルは VAR(2) ということになります。なお、推定実行前に `varsoc` コマンドを使用して適切なラグ次数を選択することもできますが、それについては [TS] **varsoc** (*mwp-057*) をご参照ください。

- Statistics ▷ Multivariate time series ▷ Vector autoregression (VAR) と操作
- Model タブ: Dependent variables: `dln_inv dln_inc dln_consump`
  Lags: Include lags 1 to: 2 （デフォルト）

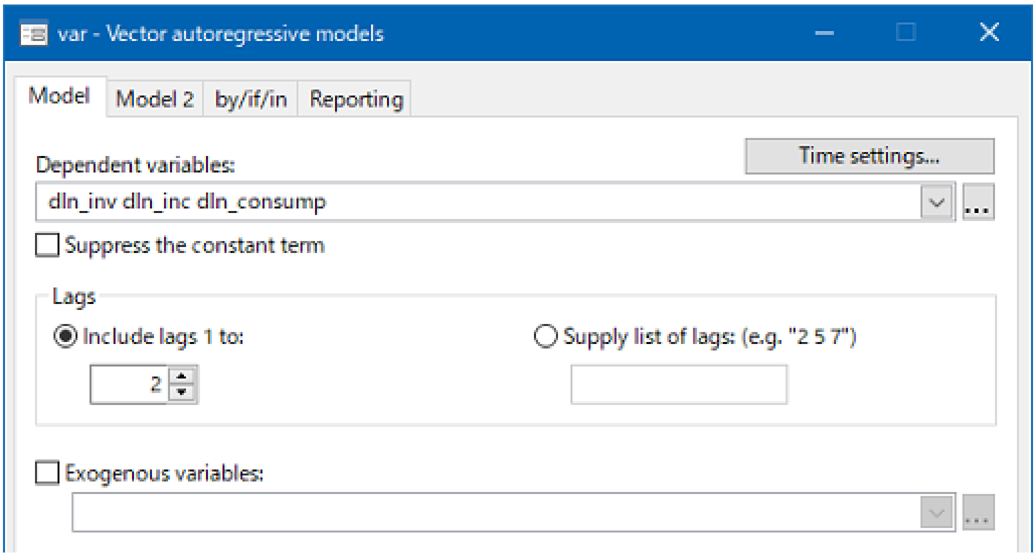

図 1 var ダイアログ – Model タブ

[*2] メニュー操作：Data ▷ Describe data ▷ List data

- by/if/in タブ: If: `qtr <= tq(1978q4)`

```
. var dln_inv dln_inc dln_consump if qtr <= tq(1978q4), lags(1/2)

Vector autoregression

Sample:  1960q4 - 1978q4                        Number of obs     =         73
Log likelihood =    606.307                     AIC               =  -16.03581
FPE            =   2.18e-11                     HQIC              =  -15.77323
Det(Sigma_ml)  =   1.23e-11                     SBIC              =  -15.37691

Equation           Parms      RMSE     R-sq      chi2     P>chi2
----------------------------------------------------------------
dln_inv               7     .046148   0.1286   10.76961   0.0958
dln_inc               7     .011719   0.1142   9.410683   0.1518
dln_consump           7     .009445   0.2513   24.50031   0.0004
----------------------------------------------------------------


------------------------------------------------------------------------------
             |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
dln_inv      |
     dln_inv |
         L1. |  -.3196318   .1192898    -2.68   0.007    -.5534355   -.0858282
         L2. |  -.1605508    .118767    -1.35   0.176      -.39333    .0722283
             |
     dln_inc |
         L1. |   .1459851   .5188451     0.28   0.778    -.8709326    1.162903
         L2. |   .1146009    .508295     0.23   0.822     -.881639    1.110841
             |
 dln_consump |
         L1. |   .9612288   .6316557     1.52   0.128    -.2767936    2.199251
         L2. |   .9344001   .6324034     1.48   0.140    -.3050877    2.173888
             |
       _cons |  -.0167221   .0163796    -1.02   0.307    -.0488257    .0153814
-------------+----------------------------------------------------------------
dln_inc      |
     dln_inv |
         L1. |   .0439309   .0302933     1.45   0.147    -.0154427    .1033046
         L2. |   .0500302   .0301605     1.66   0.097    -.0090833    .1091437
             |
     dln_inc |
         L1. |  -.1527311    .131759    -1.16   0.246    -.4109741    .1055118
         L2. |   .0191634   .1290799     0.15   0.882    -.2338285    .2721552
             |
 dln_consump |
         L1. |   .2884992   .1604069     1.80   0.072    -.0258926    .6028909
         L2. |     -.0102   .1605968    -0.06   0.949    -.3249639    .3045639
             |
       _cons |   .0157672   .0041596     3.79   0.000     .0076146    .0239198
-------------+----------------------------------------------------------------
```

dln_consump						
dln_inv						
L1.	-.002423	.0244142	-0.10	0.921	-.050274	.045428
L2.	.0338806	.0243072	1.39	0.163	-.0137607	.0815219
dln_inc						
L1.	.2248134	.1061884	2.12	0.034	.0166879	.4329389
L2.	.3549135	.1040292	3.41	0.001	.1510199	.558807
dln_consump						
L1.	-.2639695	.1292766	-2.04	0.041	-.517347	-.010592
L2.	-.0222264	.1294296	-0.17	0.864	-.2759039	.231451
_cons	.0129258	.0033523	3.86	0.000	.0063554	.0194962

> `[TS]` **var** の Example 1 では Lütkepohl (2005) との整合性を確保するため `lutstats` と `dfk` というオプションが指定されていますが、ここでは省略しました。

モデル式 (2) との対応で言えば次のようなパラメータ値が推定されたことになります。

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.320 & 0.146 & 0.961 \\ 0.044 & -0.153 & 0.288 \\ -0.002 & 0.225 & -0.264 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.161 & 0.115 & 0.934 \\ 0.050 & 0.019 & -0.010 \\ 0.034 & 0.355 & -0.022 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.017 \\ 0.016 \\ 0.013 \end{pmatrix}$$

なお、これらの点推定値以外にそれぞれに対する p 値についても注意を払う必要があります。例えば `dln_inv` に関する方程式について言えば有意なのは $a_{11}^{(1)}$ のみであり、残る $a_{11}^{(2)}, a_{12}^{(1)}, a_{12}^{(2)}, a_{13}^{(1)}, a_{13}^{(2)}, v_1$ については 0 である可能性を否定できないからです。制約を課した状態での VAR のフィットについては Example 3 を参照してください。

一方、$\mathbf{\Sigma}$ の推定値については `e(Sigma)` という形でアクセスすることが可能です。

. matrix list e(Sigma) [*3]

```
. matrix list e(Sigma)

symmetric e(Sigma)[3,3]
                 dln_inv      dln_inc  dln_consump
    dln_inv    .00192542
    dln_inc    .00006475    .00012417
dln_consump    .00011142    .00005557    .00008065
```

◁

▷ Example 2: **外生変数を含むモデル**

評価版では割愛しています。

▷ Example 3: **制約の付加**

評価版では割愛しています。

3. var **関連推定後機能**

評価版では割愛しています。

■

[*3] 推定コマンドからの出力内容は `ereturn list` とコマンド入力することによって確認できます。