mwp-018

mixed - 混合効果線形回帰　【 評価版 】

`mixed` コマンドは線形混合効果モデル (linear mixed-effects models) をフィットさせる機能を提供します。

1. 線形混合効果モデル

混合効果モデル (mixed models) とは固定効果 (fixed effects) と変量効果 (random effects) の双方を含んだモデルのことを言います。線形混合効果モデルの定義式は

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{1}$$

のように表現されます。一般的な線形回帰モデルに比べると、全般的な誤差項 $\boldsymbol{\epsilon}$ の他にランダムな変動（効果）を表す $\mathbf{Zu}$ という項が加わっている点に特徴があります。ここに

- $\mathbf{y}$ は $n \times 1$ ベクトル
- $\mathbf{X}$ は固定効果 $\boldsymbol{\beta}$ に対する $n \times p$ のデザイン/共変量行列
- $\mathbf{Z}$ は変量効果 $\mathbf{u}$ に対する $n \times q$ のデザイン/共変量行列

です。また、$n \times 1$ の誤差ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}$ は平均値が 0 で分散行列が $\sigma_\epsilon^2\mathbf{R}$ であるような多変量正規分布に従うものとします。

(1) 式の固定効果部分 $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ は標準的な OLS 回帰における線形予測項に該当するものです。これに対し (1) 式の変量効果部分 $\mathbf{Zu} + \boldsymbol{\epsilon}$ に対しては、$\mathbf{u}$ が分散共分散行列 $\mathbf{G}$ を有し、それは $\boldsymbol{\epsilon}$ と直交関係にあること、すなわち

$$\mathrm{Var}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\epsilon}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \sigma_\epsilon^2\mathbf{R}\end{bmatrix}$$

であることを仮定します。変量効果 $\mathbf{u}$ は予測はできても直接推定されるわけではありません。ただしそれは分散成分 (variance components) として知られる $\mathbf{G}$ の要素によって特徴付けられるわけですが、それらは全般的な残差分散 σ_ϵ^2 と $\mathbf{R}$ 内に含まれる残差分散パラメータと共に推定されます。

デザイン行列 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Z}$ の形式によってさまざまなデザインに対応した線形モデルが構成されます。それらはまたクラスタ内相関をモデリングする上での種々の手法を提供するものでもあります。すなわちランダム切片やランダム傾きを共用することによってクラスタ内相関を表現することができます。さらに $\mathbf{G}$ や $\mathbf{R}$ の規定のしかたによってもさまざまな柔軟性がもたらされます。

混合モデルをフィットさせる上でキーとなるのは分散成分の推定であり、種々の手法が提唱されてきました。そのうちで最もポピュラーなものが最尤法 (ML: maximum likelihood) と制限付き最尤法 (REML: restricted maximum-likelihood) によるもので、その双方が `mixed` ではサポートされています。

n 個の観測データが M 個の独立なグループ（クラスタ）から構成される場合には、(1) 式は

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_j\mathbf{u}_j + \boldsymbol{\epsilon}_j, \quad j = 1, \ldots, M \tag{2}$$

のように表現できます。この場合、$\mathbf{y}_j$ はクラスタ j に対応する $\mathbf{y}$ の行からなるものとします。$\mathbf{X}_j, \boldsymbol{\epsilon}_j$ についても同様に定義されます。変量効果 $\mathbf{u}_j$ については平均が $\mathbf{0}$、分散行列が $\boldsymbol{\Sigma}$ の正規分布に従う $q \times 1$ ベクトルの M 個の実現値とみなすことができます。行列 $\mathbf{Z}_j$ はクラスタ j の変量効果に対応した $n_j \times q$ のデザイン行列です（クラスタ j に含まれる観測データの数を n_j とする)。これらを (1) 式と対応付けると次のようになります。

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Z}_M\end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \vdots\\ \mathbf{u}_M\end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \mathbf{I}_M \otimes \boldsymbol{\Sigma}; \quad \mathbf{R} = \mathbf{I}_M \otimes \boldsymbol{\Lambda} \tag{3}$$

ただし $\boldsymbol{\Lambda}$ はレベル 1 残差の分散行列であり、$\otimes$ は Kronecker 積を意味します。

モデル式 (2) は Laird and Ware (1982) に由来するものですが、それは次のような 2 つの利点を持ちます。第 1 に変量効果の規定をより容易なものとします。例えばクラスタが学校を意味するのであれば、学校のレベルにおける変量効果を考えれば良いことになるわけです。第 2 にそれは変量効果の多段化を可能にします。例えば学校内にネストされたクラスを考えた場合、学校レベルでの変量効果とクラスレベルでの変量効果を表現できるモデルへの拡張がより容易に行えるようになります。

このような多階層モデルの扱いは後述するとして、(2) 式で表現されるモデルを 2 階層モデル (two-level model) と呼ぶことにします。クラスタ j 内の個体 i に対応する観測データを y_{ij} とするとき、個体はモデルの第 1 レベルを構成し、クラスタは第 2 レベルを構成することになります。学校内にクラスがネストされた 3 階層モデルの場合には、学生が第 1 レベルを、クラスが第 2 レベルを、学校が第 3 レベルを構成することになります。

後続のセクションのうち前半においては残差は独立で分散が均一である場合を想定します。すなわち (3) 式において $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}$（単位行列）であるとし、単一の残差分散値 σ_ϵ^2 を推定するものとします。

2. 2 階層モデル

最初に (2) 式の簡単な用例から見て行くことにします。1 階層モデルをスキップする理由はそれが単なる標準的な OLS 回帰と変らないからです。

▷ Example 1

評価版では割愛しています。

▷ Example 2

Example 1 では変量効果として定数項 u_j だけを想定したわけですが、ここでは week に依存した項、すなわちランダム傾き (random-slope) をも加味したモデルについて考えることにします。この場合、モデル式 (2) における変量効果項 $\mathbf{Z}_j\mathbf{u}_j$ は $u_{0j} + u_{1j}\texttt{week}_{ij}$ と表現されるわけで、全体としてのモデル式は次のようになります。

$$\texttt{weight}_{ij} = \beta_0 + \beta_1\texttt{week}_{ij} + u_{0j} + u_{1j}\texttt{week}_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \ldots, 9;\ j = 1, \ldots, 48 \tag{4}$$

このモデルをコマンドインタフェースでフィットさせる場合には

```
. mixed weight week || id: week
```

のように入力します。ダイアログインタフェースを使用する場合には次のように操作してください。

- Statistics ▷ Multilevel mixed-effects models ▷ Linear regression と操作
- Model タブ: Estimation method: Maximum likelihood （デフォルト）
  Fixed-effects model: Dependent variable: `weight`
  Independent variables: `week`
  Random-effects model: Equation 1: Level variable for equation: `id`
  Random coefficients: Independent variables: `week`

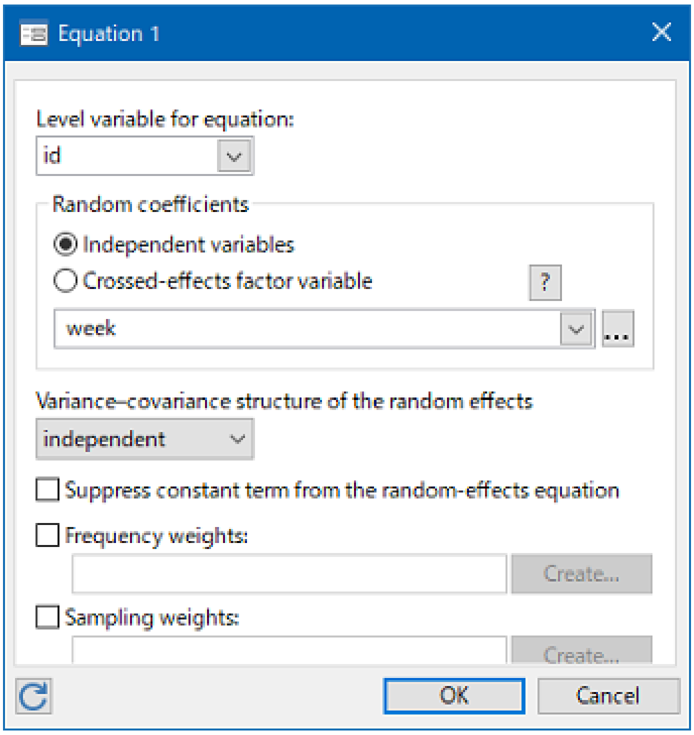

図 3 Equation 1 ダイアログ – ランダム傾き

```
. mixed weight week || id: week

Performing EM optimization ...

Performing gradient-based optimization:
Iteration 0:   log likelihood = -869.03825
Iteration 1:   log likelihood = -869.03825

Computing standard errors ...

Mixed-effects ML regression                     Number of obs     =        432
Group variable: id                              Number of groups  =         48
                                                Obs per group:
                                                              min =          9
                                                              avg =        9.0
                                                              max =          9
                                                Wald chi2(1)      =    4689.51
Log likelihood = -869.03825                     Prob > chi2       =     0.0000

------------------------------------------------------------------------------
      weight | Coefficient  Std. err.      z    P>|z|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        week |   6.209896   .0906819    68.48   0.000     6.032163    6.387629
       _cons |   19.35561   .3979159    48.64   0.000     18.57571    20.13551
------------------------------------------------------------------------------
```

```
Random-effects parameters |   Estimate   Std. err.     [95% conf. interval]
--------------------------+------------------------------------------------
id: Independent           |
                var(week) |   .3680668    .0801181      .2402389    .5639103
               var(_cons) |   6.756364    1.543503      4.317721    10.57235
--------------------------+------------------------------------------------
            var(Residual) |   1.598811    .1233988      1.374358     1.85992
---------------------------------------------------------------------------
LR test vs. linear model: chi2(2) = 764.42            Prob > chi2 = 0.0000

Note: LR test is conservative and provided only for reference.
```

推定結果を `randslope` (random slope) という名前で保存しておきます。

```
. estimates store randslope
```

上の操作では変量効果 $(u_{0j}, u_{1j})'$ に対する共分散構造としてデフォルトの `Independent` が仮定されたわけですが、それは

$$\mathbf{\Sigma} = \mathrm{Var}\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{u0} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{u1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

であることを意味します。そしてその推定値としては $\widehat{\sigma}^2_{u0} = 6.76$, $\widehat{\sigma}^2_{u1} = 0.37$ という値が得られたわけです。一方、固定効果の点推定値である $\widehat{\beta}_0 = 19.36$, $\widehat{\beta}_1 = 6.21$ という値は Example 1 と変りはありませんが、これは常時成り立つとは限りません。$\widehat{\sigma}^2_{u1}$ の 95%CI である $[0.24, 0.56]$ という結果からすると、ランダム傾き u_{1j} は有意であると考えられます。この点を尤度比検定によって確認してみます。保存した推定結果である `randint` と `randslope` とを `lrtest` によって対比させれば良いわけです。

```
. lrtest randslope randint
```
[1]

```
. lrtest randslope randint

Likelihood-ratio test
Assumption: randint nested within randslope

 LR chi2(1) = 291.78
Prob > chi2 = 0.0000

Note: The reported degrees of freedom assumes the null hypothesis is not on
      the boundary of the parameter space. If this is not true, then the
      reported test is conservative.
```

0.0000 という p 値からしてもランダム傾きを含むモデルの方がより適正なものであることがわかります。 ◁

[1] メニュー操作： Statistics ▷ Postestimation ▷ Tests, contrasts, and comparisons of parameter estimates ▷ Likelihood-ratio test comparing models ▷ Launch

3. 共分散構造

▷ Example 3

評価版では割愛しています。

4. REML 推定法

評価版では割愛しています。

5. 3 階層モデル

▷ Example 4

評価版では割愛しています。

6. ブロック対角な共分散構造

▷ Example 5

評価版では割愛しています。

7. 分散不均一な変量効果

▷ Example 6

評価版では割愛しています。

8. 分散不均一な残差誤差

▷ Example 7

評価版では割愛しています。

9. その他の残差誤差構造

▷ Example 8

評価版では割愛しています。

▷ Example 9

評価版では割愛しています。

10. 交差効果モデル

▷ Example 10

評価版では割愛しています。

▷ Example 11

評価版では割愛しています。

11. 収束上の問題

評価版では割愛しています。

12. サーベイデータ

本セクションについては英文マニュアルをご参照ください。

13. 小標本時の推定

▷ Example 13

評価版では割愛しています。

▷ Example 14

評価版では割愛しています。

補足１ – グラフ作成コマンド操作

評価版では割愛しています。

■