mwp-300

intro 4 - DSGE モデルの書換え　【 評価版 】

経済理論に基づき自然な表現形式で DSGE モデルを記述した場合、その多くは求解に必要とされる数学的な形式にフィットしないものとなります。本 whitepaper では問題となる項をどのように修正し所定の形式に持ち込むかについて解説します。なお、[DSGE] **intro 1** (*mwp-295*) については既にお読みであることを前提とします。

1. はじめに

DSGE モデルのパラメータ推定が行えるためには、モデル式が状態空間形式 (state-space form) に変換できるものであることが必要となります。ただしそのような状態空間形式を求めることができるのは、制御変数 (control variables) や状態変数 (state variables) に関する方程式が特定の構造を有している場合に限られます。多くの場合、モデルに何らかの操作を加えないと所定の構造を有したものになりません。しかしその操作はそれほど難しいものではありません。

[DSGE] **intro 1** (*mwp-295*) のセクション 4 で述べたように、モデルの構造形式が次のように記述できる場合に限り、DSGE の解法が可能です。

$$\mathbf{A}_0\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1 E_t(\mathbf{y}_{t+1}) + \mathbf{A}_2\mathbf{y}_t + \mathbf{A}_3\mathbf{x}_t \tag{1}$$

$$\mathbf{B}_0\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{B}_1 E_t(\mathbf{y}_{t+1}) + \mathbf{B}_2\mathbf{y}_t + \mathbf{B}_3\mathbf{x}_t + \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}_{t+1} \tag{2}$$

ただし $\mathbf{y}_t$ は制御変数ベクトル、$\mathbf{x}_t$ は状態変数ベクトル、$\boldsymbol{\epsilon}_t$ はショックベクトルを表します。また $\mathbf{A}_0$ から $\mathbf{A}_3$、及び $\mathbf{B}_0$ から $\mathbf{B}_3$ はパラメータ行列を意味します。$\mathbf{A}_i$ と $\mathbf{B}_j$ 中の要素はすべて構造パラメータ — ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ と表記することにします — の関数です。また、$\mathbf{A}_0$ と $\mathbf{B}_0$ は対角行列であり、$\mathbf{A}_2$ の対角要素は 0 であるものとします。一方、$\mathbf{C}$ は選択行列 (selection matrix) と呼ばれ、どの状態変数がショックの対象となるかを規定するものです。

方程式 (1) は制御変数にとって必要な構造を、方程式 (2) は状態変数にとって必要な構造を規定します。(1) 式について言うと、制御変数は 3 種類の項、すなわち

- 次の周期における制御変数の期待値
- 他の制御変数の現行値
- 状態変数の現行値

にのみ依存ものであることを意味します。その他の項の存在は問題となります。一方、(2) 式によれば、状態変数の次周期の値は 4 種類の項、すなわち

- 次周期における制御変数の期待値
- 制御変数の現行値
- 状態変数の現行値
- ショック

にのみ依存ものであることが示されています。その他の項の存在は問題となるわけです。

経済理論に基づき記述した場合、多くの DSGE モデルの構造形式には上記の要請にフィットしない問題含みの項が含まれることになります。これらの項に対しては新たな状態変数や新たな制御変数を定義し、所定の形式に合うように方程式を書き直すことによって対処します。問題含みの項に外生変数（先決変数 (predetermined variable) とも呼ばれる）が含まれる場合には新たな状態変数を定義します。これに対し、問題含みの項に新規の内生変数が含まれる場合には新たな制御変数を定義します。その上でこれらの状態変数や制御変数を用いて方程式の書き換えを行います。

問題となる項は通常次の 4 つの制約事項のいずれかに離反します。

1. 制御変数の方程式にはショックが含まれていてはならない。
2. 方程式中にはラグ付き制御変数が含まれていてはならない。
3. 方程式中にはラグ付き状態変数が含まれていてはならない。
4. 方程式中には 1 期より先の制御変数の期待値が含まれていてはならない。

これらの制約事項はいずれも新たな状態変数や新たな制御変数を加えてモデルを書き直すことによって克服されます。具体例をあげると次のようになります。

1. 制御変数の方程式中にショックが含まれている場合には、このショックを新たな状態変数とします。セクション 2 を参照ください。
2. 制御変数の方程式中にラグ付きの制御変数が含まれている場合には、ラグ付き制御変数を新たな状態変数とします。セクション 3 を参照ください。
3. 状態変数の方程式中にラグ付きの状態変数が含まれている場合には、ラグ付き状態変数を新たな状態変数とします。セクション 4 を参照ください。
4. 制御変数の方程式中に 1 期より先の制御変数の期待値が含まれている場合には、それを新たな制御変数とします。状態変数ではなく制御変数を用いる理由は、遠い将来の期待値は先決的なものではなく内生的なものとなるからです。詳細についてはセクション 5 を参照ください。

5. 制御変数の方程式中に制御変数の 2 次のラグ項が含まれている場合には、2 次のラグ付き制御変数を新たな状態変数とします。この場合、1 次のラグ項に対しても新たな状態変数を作成する必要があります。セクション 6 を参照ください。

上記制約事項 1-4 でカバーされない微妙な問題としては、DSGE 中のすべての観測変数は内生的制御変数でなくてはならないという点があげられます。DSGE モデルは通常、観測されるものはすべて内生変数として扱う理論によって生成されるため、この要請はほとんどの場合に問題となりません。しかし時にはモデル中に外生的な観測変数が含まれることがあります。例えば小規模な開放的経済の場合には自身の実質為替レートに影響を及ぼすことができないといった事態が考えられます。この問題への対処法としては、該当観測変数を外生状態変数に等しい制御変数としてモデル化する方法が考えられます。これについてはセクション 7 を参照ください。

なお、状態変数間の相関については $\mathbf{B}_3$ の非対角要素によってモデル化される点に注意してください。

2. 制御方程式に対するショック

評価版では割愛しています。

3. ラグ付き制御変数の扱い

評価版では割愛しています。

4. ラグ付き状態変数の扱い

評価版では割愛しています。

5. 1 期より先の制御変数期待値の扱い

評価版では割愛しています。

6. 2 次のラグ項の扱い

評価版では割愛しています。

7. 観測可能な外生変数の扱い

評価版では割愛しています。

■