mwp-008

vec intro - ベクトル誤差修正モデルの概要 【 評価版 】

Stata にはベクトル誤差修正モデル (VECM: vector error-correction models) に関連したコマンドが一式用意されています。本 whitepaper ではそれら VECM 関連機能に関する全般的な解説と用例の紹介を行います。個々のコマンドに関する機能概要と用例についてはそれぞれ別個の whitepaper をご参照ください。

1. VEC モデルの基本

1.1 共和分とは

OLS (ordinary least squares) 等の標準的な回帰手法では変数が共分散定常 (covariance stationary) であることを前提にしています。変数の平均値、及びそのすべての自己共分散 (autocovariances) が有限であり、かつ時間的に変動しない場合に、その変数は共分散定常であると言います。共和分分析 (cointegration analysis) 手法は変数が共分散定常とは言えないときに、それらに対する推定と推論に関するフレームワークを提供します。

© Copyright Math 工房； 一部 © Copyright StataCorp LP (used with permission)

経済の分野における多くの時系列は共分散定常ではなく“1 階差分定常 (first-difference stationary)”であるように見えます。すなわちレベルでは定常とは言えないものの、1 階差分を取った時系列は定常であるというわけです。1 階差分定常過程は I(1) 過程 (integrated processes of order 1) とも呼ばれます。これに対し共分散定常過程は I(0)、d 階差分が定常の過程は I(d) 過程と表現されます。

1 階差分定常過程の規範的な例はランダムウォークで、次のように表現されます。

$$x_t = x_{t-1} + \epsilon_t \tag{1}$$

ただし ϵ_t は平均が 0、分散が有限値 σ^2 の独立同一分布 (i.i.d.: independent and identically distributed) に従うものとします。x_t についてはすべての t について $E[x_t] = 0$ は主張できますが、$\mathrm{Var}[x_t] = T\sigma^2$ となるため時間的不変性は主張できません。このため x_t は共分散定常とは言えません。しかし $\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = \epsilon_t$ については ϵ_t が共分散定常であるため、x_t は 1 階差分定常と言えることになります。

通常の推定法は共分散定常のデータに適用されたときには良好な挙動を示すものの、I(1) 過程を対象にした場合、その漸近分布は非標準なものとなり、収束率も異なったものとなります。今、次のようなモデルについて考えることにします。

$$y_t = a + bx_t + e_t \tag{2}$$

ただし $E[e_t] = 0$ であるものとします。

y_t と x_t が共分散定常の過程であった場合には e_t も共分散定常ということになります。この場合、$E[x_t e_t] = 0$ である限りにおいて、OLS による一致性 (consistency) を維持した形での a と b の推定が可能です。さらに OLS 推定量の分布は標本サイズの増加に伴い、真値を中心とした正規分布に収束して行くことになります。

y_t と x_t が独立のランダムウォークで、かつ $b = 0$ の場合、y_t と x_t の間には何の関係もないことになるので、(2) 式は見せかけの回帰 (spurious regression) と呼ばれます。Granger and Newbold (1974) のモンテカルロ実験によれば、OLS 回帰からの通常の t 統計量が次のような見せかけの結果をもたらすことが示されています。

- 十分に大きなデータセットが与えられた場合、$b = 0$ とする帰無仮説はほとんどすべての場合に棄却されてしまう。

その後、Phillips (1986) は漸近理論を用いて Granger and Newbold (1974) の結果に関する説明を導いています。ランダムウォーク y_t と x_t は 1 階差分定常過程であるわけですが、Phillips (1986) は変数が 1 階差分定常である場合に OLS 推定量は通常の漸近特性を持たないことを示しました。

Δy_t と Δx_t は共に共分散定常であるため、Δy_t の Δx_t による回帰は有効に機能するように見えます。しかし後述するように y_t と x_t の間に共和分関係がある場合、Δy_t の Δx_t による回帰は誤った規定 (misspecified) となります。

y_t と x_t が I(1) で $b \neq 0$ の場合、e_t は I(0) のこともあれば I(1) のこともあります。Phillips and Durlauf (1986) は e_t が I(1) のときの OLS 推定量に対する漸近理論を導きましたが、実用上は余り利用されていません。より興味深いのは $e_t = y_t - a - bx_t$ が I(0) の場合です。この場合、y_t と x_t は共和分関係にある (cointegrated) と言います。すなわち 2 つの変数がそれぞれ I(1) 過程で、それらの線形結合が I(0) 過程となる場合、それらは共和分関係にあると言います。

x_t と e_t が共分散定常であるなら y_t がランダムウォークとなることはあり得ません。Granger (1981) が指摘しているように、ランダムウォークは共分散定常過程と等しくなることはないので、方程式は“バランス”しないことになります。両辺の共和分関係の次数が等しい場合に方程式はバランスしたものとなります。共和分変数を伴う実用上の問題に取り組む場合には、方程式がバランスしたものであることを確認しておく必要があります。

Engle and Granger (1987) によって提示された例は直観を養う上で有用です。y_t と x_t を次のように定義し直します。

$$y_t + \beta x_t = \epsilon_t, \qquad \epsilon_t = \epsilon_{t-1} + \xi_t \tag{3}$$
$$y_t + \alpha x_t = \nu_t, \qquad \nu_t = \rho\nu_{t-1} + \zeta_t, \quad |\rho| < 1 \tag{4}$$

ただし ξ_t と ζ_t は時間軸上での i.i.d. 攪乱であり、相互に相関を有するものとします。ϵ_t は I(1) であるため、(3) と (4) は x_t と y_t の双方が I(1) であることを示唆しています。一方、$|\rho| < 1$ という条件は ν_t と $y_t + \alpha x_t$ が I(0) であることを示しています。従って y_t と x_t は共和分関係にあり、$(1, \alpha)$ が共和分ベクトルということになります。

(3) と (4) からは次の式が誘導できます。

$$\Delta y_t = \beta\delta z_{t-1} + \eta_{1t} \tag{5}$$
$$\Delta x_t = -\delta z_{t-1} + \eta_{2t} \tag{6}$$

ただし $\delta = (1-\rho)/(\alpha-\beta), z_t = y_t + \alpha x_t$ であり、η_{1t} と η_{2t} は ξ_t と ζ_t の定常的線形結合です。この表現形式はベクトル誤差修正モデル (VECM: vector error-correction model) と呼ばれます。この場合、$z_t = 0$ というのは y_t と x_t が平衡状態にある点ととらえることができます。z_{t-1} の係数は 0 でない — 平衡状態から外れた — z_{t-1} に y_t と x_t がどう調整を加えて行くかを示すものです。z_t は系中における“誤差”を表し、(5) 式と (6) 式は系がどのようにして均衡状態に復するかを規定したものと言えます。$\rho \to 1$ — すなわち $\delta \to 0$ — の場合、系は相関を持った 1 対のランダムウォークに帰着されて行きます。

α がわかれば z_t もわかるため、(5) と (6) で規定される定常系に対処することができるようになります。α を既知とすることは馬鹿げているようにも見えますが、共和分パラメータ α に対しては調整パラメータである β や δ に対する推定法に比べより高速に真値に収束する推定法が存在するため、それを既知とした形で多くの分析を進めることができるわけです。

2 変量の共和分関係の定義からすると、I(1) 変数間の線形結合の中で I(0) となるものが存在すれば良いことになります。y_t と x_t が I(1) であるときに 2 つの有限の実数 $a \neq 0$ と $b \neq 0$ が存在し、$ay_t + bx_t$ が I(0) となるとするなら、y_t と x_t は共和分関係にあると言えます。この場合、2 つのパラメータ、a と b が存在するわけですが、識別できるのは 1 つだけです。なぜなら $ay_t + bx_t$ が I(0) であるとするなら $cay_t + cbx_t$ も I(0) となるからです（c は有限で 0 ではない任意の実数とする）。2 変量の場合、識別を得ることは比較的単純です。(4) における y_t の係数が 1 である点に注意してください。これによって共和分ベクトルに対する識別用の制約が自然な形で課されているわけです。多変量の場合の識別については下記の通り、より複雑なものとなります。

$\mathbf{y}_t$ が I(1) 変数からなる $K \times 1$ ベクトルであるときにベクトル $\boldsymbol{\beta}$ が存在し、$\boldsymbol{\beta}\mathbf{y}_t$ が I(0) ベクトルとなるとき、$\mathbf{y}_t$ は共和分ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ と次数 $(1, 0)$ の共和分関係にあると言います。このとき $\boldsymbol{\beta}$ 中に含まれるパラメータのことを共和分方程式パラメータと呼びます。長さが K のベクトルに対しては最大で $K - 1$ 個の共和分ベクトルが存在する可能性があります。共和分に関するより一般的な定義については Engle and Granger (1987) を参照ください。

1.2 多変量 VEC モデル

評価版では割愛しています。

1.3 Johansen VECM フレームワーク中におけるトレンド

評価版では割愛しています。

2. VECM の用例

本セクションにおいては Example データセット `txhprice.dta` を用いて VEC 関連コマンドの用法を説明します。

```
. use https://www.stata-press.com/data/r19/txhprice.dta
```
[*1]

このデータセット中にはテキサス州 4 都市 — Austin, Dallas, Houston, San Antonio — における住宅価格対数値の推移が月単位に記録されています。

```
. list t austin dallas houston sa if _n <= 4 | _n >= (_N-3), separator(4)
```

	t	austin	dallas	houston	sa
1.	1990m1	11.40422605	11.6324847	11.38849539	11.19134184
2.	1990m2	11.39639165	11.62803827	11.41861479	11.22257316
3.	1990m3	11.36442546	11.60550465	11.39188714	11.29849385
4.	1990m4	11.11393932	11.62625415	11.442503	11.39863632
165.	2003m9	12.14579171	12.16837078	12.04590389	11.80931948
166.	2003m10	12.19955143	12.14046689	12.05117168	11.78524006
167.	2003m11	12.19551713	12.15898104	12.06968002	11.84438516
168.	2003m12	12.25200158	12.17303279	12.10625231	11.85296277

[*1] メニュー操作：File ▷ Example Datasets ▷ Stata 19 manual datasets と操作、Time-Series Reference Manual [TS] の vec intro の項よりダウンロードする。

これらの変数をグラフ化すると次のようになります。価格はすべて対数値です。

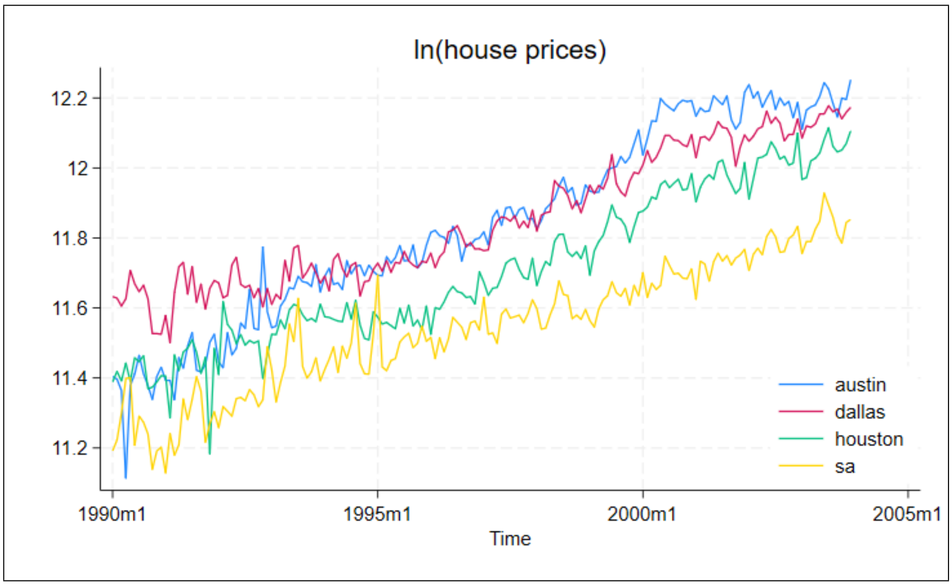

図 1 住宅価格の変動（4 都市）

いずれの時系列もトレンドを示しており、定常過程とは言えないことは明らかです。それではまず Dallas と Houston のデータに着目して分析を行ってみることにします。

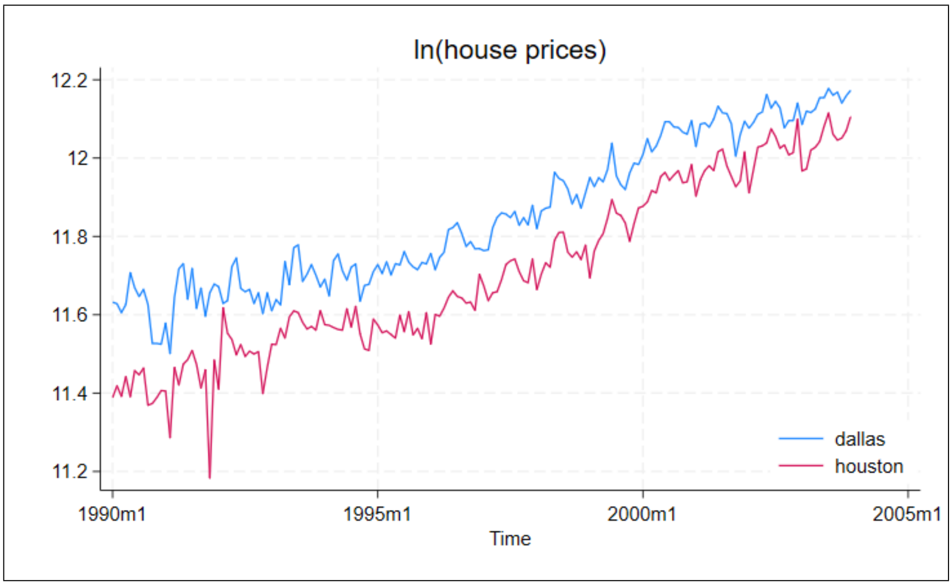

図 2 住宅価格の変動（2 都市）

2.1 ラグ次数の選択

評価版では割愛しています。

2.2 共和分の検定

評価版では割愛しています。

2.3 VECM のフィット

`vec` は共和分 VECM パラメータの推定を行います。関心対象のパラメータには次の 4 種類があります。

1. 共和分方程式中のパラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$
2. 調整係数ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$
3. 短期型係数
4. 有用な解釈につながる $\boldsymbol{\beta}$ と $\boldsymbol{\alpha}$ の標準的関数

これらについては `[TS]` **vec** (*mwp-063*) で議論するとして、ここでは 1-3 を中心に `vec` の出力を見て行くことにします。

Dallas と Houston の系列間には 1 つの共和分方程式が存在することがわかったわけですから、それを前提にラグ次数 1/2 の VEC モデルをフィットさせることにします。なお、$\mathbf{y}_t = (\texttt{dallas}, \texttt{houston})'$ としたとき、フィット対象のモデル式は成分表示で書くと次のようになる点に注意してください。

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_{1,t-1} \\ \Delta y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \tag{12}$$

- Statistics ▷ Multivariate time series ▷ Vector error-correction model (VECM) と操作
- Model タブ: Dependent variables: `dallas houston`
  Number of cointegrating equations (rank): 1 （デフォルト）
  Maximum lag to be included in underlying VAR model: 2 （デフォルト）
  Trend specification: constant （デフォルト）

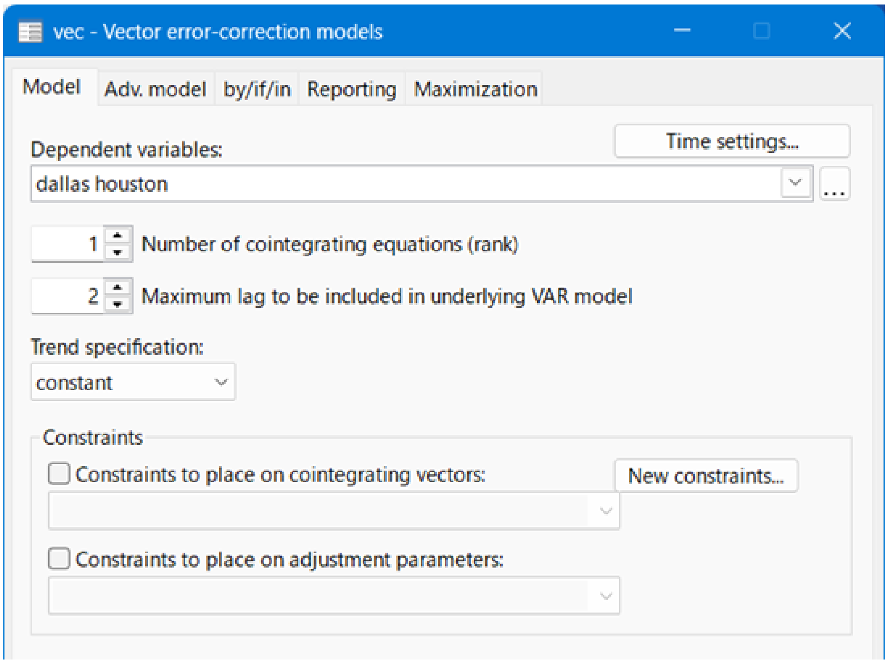

図 5 vec ダイアログ - Model タブ

```
. vec dallas houston, trend(constant)

Vector error-correction model

Sample: 1990m3 thru 2003m12                      Number of obs     =        166
                                                 AIC               =  -7.115516
Log likelihood =  599.5878                       HQIC              =   -7.04703
Det(Sigma_ml)  =  2.50e-06                       SBIC              =  -6.946794

Equation           Parms      RMSE     R-sq      chi2     P>chi2
----------------------------------------------------------------
D_dallas             4     .038546   0.1692   32.98959   0.0000
D_houston            4     .045348   0.3737   96.66399   0.0000
----------------------------------------------------------------

------------------------------------------------------------------------------
             | Coefficient  Std. err.      z    P>|z|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
D_dallas     |
        _ce1 |
         L1. |  -.3038799   .0908504    -3.34   0.001    -.4819434   -.1258165
             |
      dallas |
         LD. |  -.1647304   .0879356    -1.87   0.061     -.337081    .0076202
             |
     houston |
         LD. |  -.0998368   .0650838    -1.53   0.125    -.2273988    .0277251
             |
       _cons |   .0056128   .0030341     1.85   0.064    -.0003339    .0115595
-------------+----------------------------------------------------------------
D_houston    |
        _ce1 |
         L1. |   .5027143   .1068838     4.70   0.000     .2932258    .7122028
             |
      dallas |
         LD. |  -.0619653   .1034547    -0.60   0.549    -.2647327    .1408022
             |
     houston |
         LD. |  -.3328437     .07657    -4.35   0.000    -.4829181   -.1827693
             |
       _cons |   .0033928   .0035695     0.95   0.342    -.0036034     .010389
------------------------------------------------------------------------------
```

```
Cointegrating equations

Equation           Parms    chi2     P>chi2
-------------------------------------------
_ce1                   1   1640.088   0.0000
-------------------------------------------

Identification:  beta is exactly identified

                 Johansen normalization restriction imposed
------------------------------------------------------------------------------
        beta | Coefficient  Std. err.      z    P>|z|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
_ce1         |
      dallas |          1          .        .       .            .           .
     houston |  -.8675936   .0214231   -40.50   0.000    -.9095821    -.825605
       _cons |  -1.688897          .        .       .            .           .
------------------------------------------------------------------------------
```

ヘッダ中には標本に関する情報の他、それぞれの方程式のフィットの具合と全般的なモデルフィットに関する統計情報が出力されています。一方、最初のテーブルには短期型 (short-run) パラメータの推定値が標準誤差、z 統計量、信頼区間に関する情報と共に表示されています。この中で `L._ce1` に対する 2 つの係数値は調整係数ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ 中のパラメータを意味します[*2]。これに対し 2 番目の推定テーブル中には共和分ベクトルのパラメータ推定値が標準誤差、z 統計量、信頼区間に関する情報と共に表示されています。

推定結果をまとめておくと次のようになります。

$$\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}_1\\ \widehat{\alpha}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.304\\ 0.503\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}\widehat{\beta}_1\\ \widehat{\beta}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -0.868\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}\widehat{v}_1\\ \widehat{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.0056\\ 0.0034\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\widehat{\gamma}_{11} & \widehat{\gamma}_{12}\\ \widehat{\gamma}_{21} & \widehat{\gamma}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.165 & -0.0998\\ -0.062 & -0.333\end{pmatrix}$$

全般的に見てモデルのフィットが良好であることは出力に示されています。共和分方程式の `houston` の係数 (β_2)、及び調整パラメータ (α_1, α_2) はいずれも有意であることがわかります。この 2 変量モデルにおける調整パラメータの解釈は容易であり、その符合が均衡に向う方向にあることが確認できます。共和分方程式の予測が正であるとすると、その方程式中における `dallas`(y_{1t}) の係数値が正であることから、`dallas` が均衡値よりも高い値にあることがわかります。一方、α_1 の推定値は -0.3 であるわけです。従って Dallas における平均住宅価格が非常に高いときには、それは短期間のうちに Houston レベルに戻ることになります。逆に α_2 の推定値は 0.5 となっています。このため Dallas における平均住宅価格が非常に高いときには、Dallas における価格が調整されると同時に、Houston の平均住宅価格は Dallas レベルの方向に向うことになります。

[*2] `ce` とあるのは共和分方程式を意味する cointegrating equations の略です。

2.4 Johansen の規格化

評価版では割愛しています。

2.5 推定後機能

評価版では割愛しています。

2.6 インパルス応答解析

評価版では割愛しています。

2.7 VECM による予測

評価版では割愛しています。

補足１ – VEC モデル式の誘導

評価版では割愛しています。

■